Física para estudiantes de Ingeniería: Cinemática de la partícula

.UBAfiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

Índice

Cinemática de la partícula

1_ MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Las magnitudes escalares son aquéllas que quedan totalmente determinadas dando un sólo número real y una unidad de medida[1]. Ejemplos de este tipo de magnitud[2] son la longitud de un hilo, la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Se las puede representar mediante segmentos tomados sobre una recta a partir de un origen y de longitud igual al número real que indica su medida. Otros ejemplos de magnitudes escalares son la densidad; el volumen; el trabajo mecánico; la potencia; la temperatura.

La definición que sigue se expresa en el contexto de la mecánica clásica elemental. Los vectores, en general, son entidades matemáticas que poseen propiedades más avanzadas que las dichas a continuación, pero por el momento nos conformaremos con estas para describir y calcular los modelos físicos correspondientes.

A las magnitudes vectoriales no se las puede determinar completamente mediante un número real y una unidad de medida. Por ejemplo, para dar la velocidad de un móvil en un punto del espacio, además de su intensidad se debe indicar la dirección del movimiento (dada por la recta tangente a la trayectoria en cada punto) y el sentido de movimiento en esa dirección (dado por las dos posibles orientaciones o sentidos de la recta). Al igual que con la velocidad ocurre con las fuerzas: sus efectos dependen no sólo de la intensidad sino también de las direcciones y sentidos en que actúan. Otros ejemplos de magnitudes vectoriales son la aceleración; el *momentum* o cantidad de movimiento; el momento angular o momento cinético. Para representarlas hay que considerar vectores, tal como el ejemplo de la figura 1.

Definición 1: Se llama vector a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama origen y el segundo extremo del vector. La recta que contiene al vector determina la dirección del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina su sentido.

[1] La unidad de medida está definida por convenciones internacionales, se trata de una porción de la misma magnitud que puede ser repetida en los laboratorios que custodian que se cumplan esas convenciones. Deben poder ser obtenidas en cualquier lugar si se cumple un procedimiento correcto. Adoptaremos el Sistema Internacional de Unidades en esta publicación. En la Argentina este sistema se contempla en el SIMELA Sistema Métrico Legal Argentino.

[2] En este apartado damos ejemplos dentro del contexto de la mecánica. Podemos encontrar otros ejemplos de magnitudes físicas que son transversales a toda la física, la energía es uno de los más importantes. También en electromagnetismo encontramos la carga eléctrica y la diferencia de potencial.

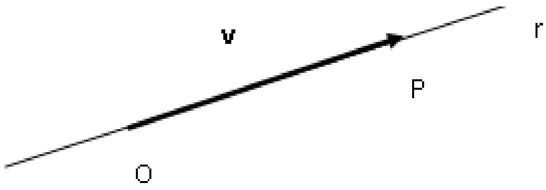

Figura 1

En la **figura 1** se representa el vector **a** sobre la recta r, de origen O y extremo P. En adelante los vectores serán designados con letras mayúsculas o minúsculas en negrita.

Definición 2: Se denomina módulo de un vector al valor o intensidad que se representa mediante la longitud del segmento orientado que lo define.

El módulo de un vector es siempre un número positivo o cero. Será representado mediante la letra sin negrita o como vector entre barras: mód **v** = v = |**v**|.

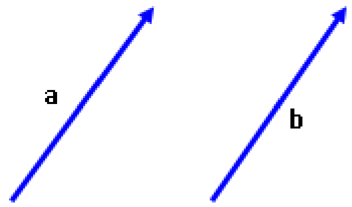

Figura 2

En figura 2, **a** = **b**. Esta definición corresponde a los vectores libres; o sea, vectores que pueden deslizar a lo largo de una recta y desplazarse paralelamente a sí mismos en el espacio. Son los que nos interesan y cumplen con las tres propiedades (reflexiva, simétrica y transitiva) que se exigen a toda definición de equivalencia entre elementos de un conjunto.[3]

En el párrafo siguiente se trata el tema de la representación cartesiana del vector. A partir de esos nuevos conceptos se podrá mejorar la definición de módulo y distinguir el módulo, las componentes cartesianas y las proyecciones de un vector sobre las direcciones que se definen por versores cartesianos.

[3] Si deseamos ser rigurosos, debemos asumir que los vectores que utilizaremos cumplen la axiomática algebraica correspondiente, por ejemplo: suma como composición interna, existencia de neutro de esta operación, producto con un elemento del cuerpo de los reales o complejos que se utilice, etc.

2_ COMPONENTES CARTESIANAS DE UN VECTOR

Para ubicar un objeto cualquiera, ya sea que esté en reposo o en movimiento, por lo general utilizamos como referencia un punto fijo. Se puede discutir la existencia de un punto que consideramos fijo, pero no quisiéramos distraernos en estas interesantes cuestiones topológicas. Nos basta suponer que para los fines de la elaboración del modelo físico-matemático mecánico elemental, habrá puntos en el laboratorio o en el entorno del espacio considerado que pueden suponerse fijos para todos los fines prácticos que consideraremos.

Para ubicar un cuerpo puntual en reposo en un plano o describiendo una trayectoria plana, nos basta con dar su distancia a dos rectas fijas del plano (perpendiculares entre sí para mayor facilidad en los cálculos) que tomamos como referencia. De la misma forma, todo punto del espacio queda determinado unívocamente mediante su distancia a tres rectas fijas respectivamente perpendiculares entre sí. A este sistema de referencia lo denominamos sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de origen O y ejes x, y, z.

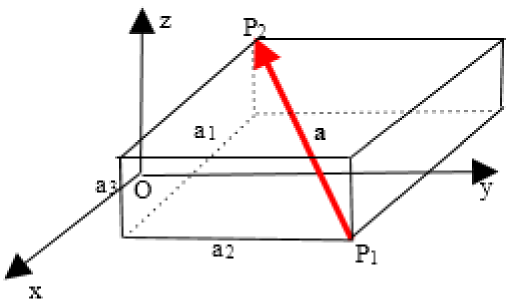

Figura 3

$\mathbf{P_1}$ (x_1, y_1, z_1) y $\mathbf{P_2}$ (x_2, y_2, z_2) son respectivamente el origen y el extremo del vector **a**.

> **Definición 4:** Se denominan componentes de un vector **a** respecto del sistema (O; x, y, z) a las proyecciones de **a** sobre los ejes, o sea a los números: a_1, a_2, a_3.

En general, pondremos **a**= (a_1, a_2, a_3) para indicar que a_1, a_2 y a_3 son las componentes escalares del vector **a**, en su expresión cartesiana. Estas componentes pueden ser números positivos, negativos o cero (más adelante veremos que pueden ser funciones de una o más variables), pero siempre deben ser calculadas como diferencia entre las coordenadas del extremo y las del origen del vector. Así, por ejemplo, dos vectores opuestos (de igual módulo y dirección pero de sentidos opuestos) tienen sus componentes iguales en valor absoluto pero de signos contrarios.

Como consecuencia de la definición anterior y de la definición general de igualdad de vectores se deduce que dos vectores iguales tienen las mismas componentes si se los representa a ambos en un cierto sistema de coordenadas, cualquiera sea. En el caso de que rote el sistema cartesiano, que se utiliza para describir un vector, las componentes de un mismo vector pueden ser diferentes entre sí. Es decir, las componentes están relacionadas a la base del espacio vectorial que se emplea.

Un vector es invariante a los cambios de coordenadas (independiente de cualquier sistema de coordenadas que por conveniencia se haya introducido en el espacio). Esta es la propiedad esencial del cálculo vectorial y lo que lo transforma en una herramienta tan potente.

Ejemplo

Consideremos ahora el módulo de un vector que ha sido representado en coordenadas ortogonales. Dado que el vector **a** es la diagonal del paralelepípedo, ver figura 3, cuyas aristas son a_1, a_2 y a_3, el módulo del vector a es:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

3_CINEMÁTICA: ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO EN 3D

Punto material o partícula clásica

Es una idealización de un objeto móvil que permite describir en forma elemental el movimiento de cuerpos, considerándolos como puntos o partículas de dimensiones suficientemente pequeñas, pero con propiedades de materia (la masa especialmente).

Posición de un punto material

Si nos encontramos en nuestra sede Av. Paseo Colón (PC) y deseamos ir a la sede Ciudad Universitaria (CU), deseamos saber la posición de CU respecto de PC. No nos basta saber que CU está a 12 km de PC. Queremos saber si tenemos que dirigirnos hacia el norte, el sur, el este o el oeste. En consecuencia, deseamos saber cuál es el vector posición de CU respecto de PC: módulo, dirección y sentido. Este ejemplo lo tomamos como idea inicial, para seguir avanzando hacia la definición de posición de un punto “P” respecto de otro “P_1” tomado como referencia.

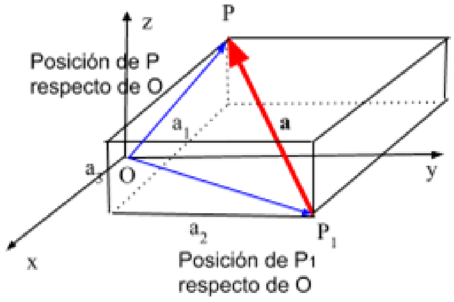

Figura 4

4_ POSICIÓN DE UNA PARTÍCULA "P" RESPECTO DEL OBSERVADOR "O"

Para conocer la posición de un punto "P" respecto del origen "O", en el espacio 3D (espacio euclídeo tridimensional), lo representamos mediante una terna ordenada de números reales. Nos tienen que quedar unívocamente definidas tres propiedades:

1. distancia entre "O" y "P",
2. la dirección para la cual partiendo de "O" alcanzamos al punto "P",
3. el sentido de recorrido para llegar de "O" hasta "P".

Es decir no puede haber dudas del módulo, dirección y sentido del vector que estamos tomando como posición de "P" respecto de "O".

En la **figura 4** indicamos en color azul los vectores posición de P y de P_1 respecto del origen O.

También indicamos en rojo la posición de P respecto de P_1. Debemos prestar especial atención a esta indicación, que se hace como diferencia entre los dos vectores en color azul.

La posición del punto P respecto de un punto P_1, que no es el origen, la escribimos como diferencia entre los vectores posición de dichos puntos respecto del origen.[4]

El próximo párrafo trata de cómo escribir estos vectores formalmente.

[4] Que la posición del punto P se pueda escribir referida al punto P1, es ventajoso y se apreciarà su utilidad cuando se trate el tema de Movimiento Relativo. También más adelante en temas como Gravitación, Electrostática y Magnetostática se utilizará esta técnica de modelización físico matemática para describir campos de fuerzas producidos por conjuntos distribuidos de masas, cargas y corrientes respectivamente.

5_ SISTEMAS DE REFERENCIA. ENCUADRE EMPÍRICO DEL MOVIMIENTO.

Podemos asumir que hay un observador “O” afirmado al piso del aula.

Este observador mide que una partícula “A” se mueve, y también que se mueve otra partícula “B”. Pero si también observa que la posición de “B” respecto de “A” no cambia a medida que transcurre el tiempo, entonces se dice que “B” no se mueve respecto de “A”.

También decimos que la posición de “A” respecto de “O” cambia a medida que transcurre el tiempo por lo cual “A” está en movimiento respecto de “O”. Análogamente la partícula “B” se mueve respecto de “O”.

De la descripción anterior surge que el movimiento cobra sentido, cuando decimos primero respecto de qué observador se produce el cambio de posición, en la medida que transcurre el tiempo.

Nosotros vamos a asumir que para las experiencias mecánicas que se intentan describir el observador, que denominamos “O”, se encuentra en reposo. Esto no es absoluto, decimos que dentro del intervalo de tiempo que transcurre mientras realizamos la experiencia dicho observador está quieto o en reposo. Este observador “O” en reposo lo podemos pensar como firmemente adherido al laboratorio.

Aunque la afirmación anterior es solamente una primera aproximación, resulta ser útil para la mecánica elemental. Pero en el caso que tengamos que hacer experimentos más extensos, podemos pensar que el observador en reposo, por ejemplo, se ubica en estrellas consideradas fijas durante siglos.

Ningún sistema de referencia está realmente en reposo. La Tierra, se mueve con respecto al Sol, el Sol en el Sistema Solar, éste último en la galaxia y así sucesivamente. De todas formas, y teniendo lo anterior en cuenta, en muchos casos podemos considerar que dichos movimientos tienen una influencia despreciable con respecto al movimiento de otros cuerpos que, por ejemplo, se desplazan con respecto a la superficie de la Tierra. Por eso tomamos a la Tierra como un sistema de referencia “fijo”, aunque en rigor no lo sea.

Adoptaremos una buena aproximación para los alcances de este texto:

A un sistema de referencia considerado “fijo” se lo llama sistema “Tierra” o sistema “Laboratorio”.

A los sistemas de referencia que están en reposo o se mueven a velocidad constante, se los llama Sistemas Inerciales, y a los que se mueven en forma acelerada, Sistemas No Inerciales.

Por otra parte pensemos que cualquier base del espacio 3D que nos permita escribir vectores, puede ser adoptada por el observador "O" para describir la posición y el movimiento de cualquier partícula clásica.

6_ SISTEMA DE COORDENADAS: CARTESIANAS E INTRÍNSECAS.

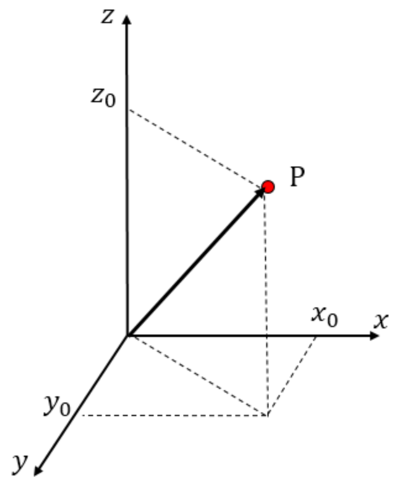

Figura 5

Uno de los sistemas de coordenadas más utilizado en el espacio euclídeo es el sistema cartesiano, también llamado ortogonal. El sistema cartesiano consta de tres ejes que son perpendiculares entre sí. Hay otros sistemas de coordenadas ortogonales en sentido amplio, por ejemplo: el polar, el cilíndrico, y el esférico.

Se puede utilizar cualquier sistema de coordenadas para representar la posición de un objeto en el espacio, la elección de uno u otro se hace mirando la geometría que domine el movimiento del objeto, con el fin de simplificar su descripción.[5]

En el apéndice, se hallan contenidos que justifican la utilización de coordenadas polares.

[5] Quizás esta ventaja geométrica y de consideraciones de simetrías, no sea tan apreciable en Física 1 pero cobrará importancia en Física 2.

Trayectoria

Es la línea que queda definida con las sucesivas posiciones que va ocupando el punto material en su recorrido. Si bien el móvil hace su recorrido a través del tiempo, se reserva el nombre de ecuaciones horarias a la forma paramétrica, con parámetro tiempo, de escribir la trayectoria.

Matemáticamente la trayectoria se puede representar por una función de posición (x,,z).

Pero también se podría aceptar una parametrización y tomarla como función paramétrica ((u),y(u),z(u)).

Así entonces, en algunos casos particulares se suele presentar la función paramétrica, tomando como parámetro el tiempo. Entonces denominaremos al sistema de ecuaciones paramétricas como ***Ecuaciones horarias del movimiento***.

Ecuaciones horarias del movimiento (en cartesianas)

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Coordenadas cartesianas

El vector posición lo expresamos, como dijimos, como una terna ordenada de números reales o como una expresión en función de los versores que indican la referencia de tres ejes concurrentes al origen.

El vector indica un punto en relación con el origen de coordenadas, en general suponemos la base del sistema cartesiano y las componentes del vector son las proyecciones del mismo sobre la base cartesiana.

El vector posición lo podemos nombrar identificando el punto "P" respecto del origen "O" de dos formas que son habituales:

$$\overline{P - O} = \bar{r}_{P-O}$$

En cartesianas 3D:

$$\bar{r}_{P-O} = x_P\breve{\imath} + y_P\breve{\jmath} + z_P\breve{k}$$

El módulo de este vector es la distancia que existe entre P y O:

$$|\overline{r}_{P-O}| = \sqrt{(x_P)^2 + (y_P)^2 + (z_P)^2}$$

En cartesianas 2D:

$$\overline{r}_{P-O} = x_P\breve{\imath} + y_P\breve{\jmath}$$

El módulo de este vector es la distancia que existe entre P y O:

$$|\overline{r}_{P-O}| = \sqrt{(x_P)^2 + (y_P)^2}$$

x_P, y_P, z_P: son coordenadas del punto, y que variarán en función del tiempo en la medida que la partícula se mueva.

<u>Coordenadas intrínsecas</u>

(El desarrollo de este sistema lo hacemos restringido a 2D, para extenderlo a 3D habría que desarrollar teoría de curvas y triedro de Frenet, pero consideramos que es mejor estudiarlo después de tener conocimientos sólidos de Análisis Matemático II).

Las coordenadas intrínsecas son coordenadas de trayectoria. El punto bajo estudio es el origen del triedro mencionado. Para comprender cómo se comportan los versores del sistema intrínseco: versor tangencial y versor normal, estudiaremos previamente la velocidad instantánea de un punto "`P" respecto de un observador fijo "O".

7_ CAMBIO DE POSICIÓN DE UN PUNTO "P" RESPECTO DE UN OBSERVADOR FIJO "O".

Supongamos que el punto "P" cambia de posición en forma suave respecto de un observador fijo "O" y que ese cambio se hace durante un intervalo pequeño de tiempo.

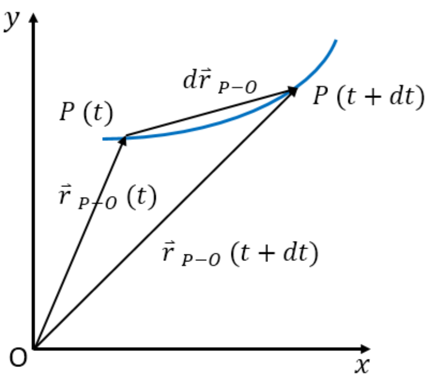

Figura 6

$\vec{r}_{P-O}(t)$: es la posición inicial.

$\vec{r}_{P-O}(t + dt)$: es la posición final.

La diferencia entre estos vectores es el cambio de posición:

$$d\vec{r}_{P-O}(t) = \vec{r}_{P-O}(t + dt) - \vec{r}_{P-O}(t)$$

Si lo queremos ver desde el punto de vista matemático, teniendo en cuenta que el intervalo de tiempo es pequeño, se puede utilizar el concepto de diferencial de la función que representa el vector posición y a partir de ella calcular la posición final:

$$\vec{r}_{P-O}(t + dt) = \vec{r}_{P-O}(t) + \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt}\, dt$$

En esta expresión vemos que en el segundo término aparece una derivada, a dicha derivada se la denomina velocidad instantánea del punto P respecto del observador fijo O.

Dos propiedades muy importantes del cambio de posición:

1. Cualquier observador fijo mide el mismo cambio de posición. Se puede verificar gráficamente lo dejamos a cargo del lector.
2. El vector cambio de posición es tangente a la trayectoria.

En la **figura 6** observamos que el vector $d\vec{r}_{P-O}(t)$ está dibujado como secante a la trayectoria. Sin embargo debemos pensar esta situación para un intervalo muy pequeño de tiempo, para dicha situación el vector posición final $\vec{r}_{P-O}(t + dt)$ estará indicando un punto infinitamente próximo al punto inicial, es decir en el límite para un intervalo de tiempo tendiendo a cero, la secante se acerca infinitamente a la tangente a la trayectoria.

8_ VELOCIDAD INSTANTÁNEA DE UN PUNTO “P” RESPECTO DE UN OBSERVADOR FIJO “O”.

Cuando nos interesa describir cómo varía la posición de una partícula P respecto del tiempo, resulta útil y se hace muy frecuentemente un estudio de cómo se comporta el segundo término de la ecuación:

$$\vec{r}_{P-O}(t + dt) = \vec{r}_{P-O}(t) + \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt}\, dt$$

La cual ya hemos introducido. Y entonces podemos escribirla de una forma más conveniente:

$$\frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_{P-O}(t+dt) - \vec{r}_{P-O}(t)}{\Delta t}$$

Y utilizar esta expresión como definición operativa del vector velocidad instantánea del punto material "P" respecto del punto fijo "O".

$$\vec{v}_{P-O} = \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_{P-O}(t+dt) - \vec{r}_{P-O}(t)}{\Delta t}$$

La interpretamos como el cociente de un vector por un escalar.

Dado que el cambio de posición se verifica en un intervalo de tiempo muy pequeño el vector resultante será tangente a la trayectoria, en forma análoga a lo dicho el ítem anterior.

Observación interesante:

Si hubiera otro observador fijo en un punto que no fuera el origen de coordenadas, por ejemplo en el punto P1, mediría la misma velocidad que el observador en el origen.

$$\vec{v}_{P-P_1} = \frac{d\vec{r}_{P-P_1}}{dt}$$

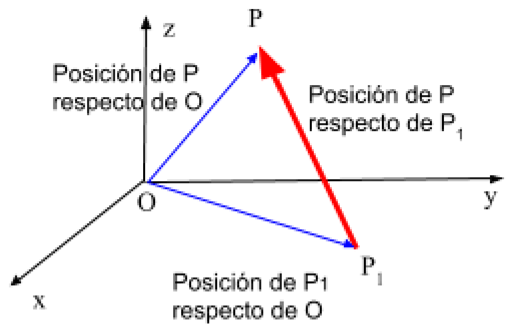

Figura 7

Vamos a escribir los vectores posición de P y de P_1, respecto del origen. Tenemos en cuenta también a ambos observadores y operamos considerando un intervalo muy pequeño de tiempo:

$$\vec{r}_{P-O}(t+dt) = \vec{r}_{P-O}(t) + \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt}\, dt$$

Y también: $\vec{r}_{P_1-O}(t+dt) = \vec{r}_{P_1-O}(t) + \frac{d\vec{r}_{P_1-O}}{dt}\, dt$

Hacemos la diferencia:

$$\vec{r}_{P-P_1}(t+dt) = \vec{r}_{P-O}(t+dt) - \vec{r}_{P_1-O}(t+dt)$$

$$\vec{r}_{P-P_1}(t+dt) = \vec{r}_{P-O}(t) + \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt}\, dt - \vec{r}_{P_1-O}(t) - \frac{d\vec{r}_{P_1-O}}{dt}\, dt$$

Pero, por **figura 7**:

$$\vec{r}_{P-P_1}(t) = \vec{r}_{P-O}(t) - \vec{r}_{P_1-O}(t)$$

La derivada es distributiva con la diferencia:

$$\frac{d\vec{r}_{P-P_1}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{P_1-O}}{dt}$$

En nuestro desarrollo de este capítulo:

$$\frac{d\vec{r}_{P_1-O}}{dt} = 0$$

En el desarrollo del tema de velocidad relativa para relatividad Galileana o clásica esta derivada no será nula, pero aquí estamos suponiendo que el punto P_1 es fijo.

Entonces en la ecuación anterior:

$$\vec{r}_{P-P_1}(t+dt) = \vec{r}_{P-O}(t) + \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt}\, dt - \vec{r}_{P_1-O}(t) - \frac{d\vec{r}_{P_1-O}}{dt}\, dt$$

Reemplazamos

$$\vec{r}_{P-P_1}(t+dt) = \vec{r}_{P-P_1}(t) + \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt}\, dt$$

$$\vec{r}_{P-P_1}(t+dt) - \vec{r}_{P-P_1}(t) = \frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt}\, dt$$

$$\frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}_{P-O}(t+dt) - \vec{r}_{P-O}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}_{P-P_1}}{dt}$$

Es decir,

$$\frac{d\vec{r}_{P-O}}{dt} = \vec{v}_{P-O}$$

$$\frac{d\vec{r}_{P-P_1}}{dt} = \vec{v}_{P-P_1}$$

Entonces si P_1 es un punto fijo: $\vec{v}_{P-O} = \vec{v}_{P-P_1}$

Conclusiones

- La velocidad es un vector.
- La velocidad es tangente a la trayectoria.
- La velocidad del punto P, que miden dos observadores fijos, es la misma para ambos observadores. Si los observadores se mueven entre sí la cosa cambia como veremos en la unidad de movimiento relativo.
- La velocidad como todo vector se puede representar en el sistema de coordenadas que deseemos y sigue siendo el vector velocidad de esa partícula. Los números que representan cada coordenada pueden verse diferentes, pero como vector es independiente del sistema de coordenadas elegido como base (algebraicamente hablando) del espacio.

9_ VECTOR VELOCIDAD EN COORDENADAS INTRÍNSECAS Y TRANSFORMACIÓN A COORDENADAS CARTESIANAS EN 2D.

La velocidad es tangente a la trayectoria. Esta propiedad la utilizamos para encontrar el versor tangente y expresar la velocidad de la partícula “P”.

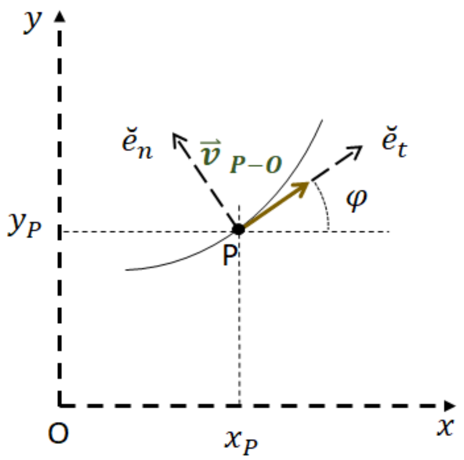

Figura 8

$\vec{v}_{P-O} = |\vec{v}_{P-O}|\, \breve{e}_t$

Comprobamos que el versor tangente, es el vector velocidad dividido por su módulo.

$|\vec{v}_{P-O}|$: es el módulo del vector velocidad.

$\breve{e}_t$: es el versor tangencial a la trayectoria o versor tangente.

La expresión en coordenadas cartesianas de este versor es: $\breve{e}_t = cos\,\varphi\,\breve{\imath} + \; sen\,\varphi\,\breve{\jmath}$

Otra vez, como para polares, en este sistema, se verifica que el ángulo φ, es una variable que se toma desde el eje de abscisas y que depende del tiempo en la medida que se mueve el punto "P". Y su derivada es la velocidad angular ω.
Además, como se dijo anteriormente, consideramos al sistema cartesiano como sistema fijo.

Para definir el versor normal utilizaremos la técnica de la derivada del versor tangente.

$$\frac{d\breve{e}_t}{dt} = (-sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \; cos\,\varphi\,\breve{\jmath})\,\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\breve{e}_t}{dt} = (-sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \; cos\,\varphi\,\breve{\jmath})\,\omega$$

El paréntesis es un versor que se denomina **versor normal:**

$$\breve{e}_n = -sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \; cos\,\varphi\,\breve{\jmath}$$

EJEMPLO:

Móvil "P" que se mueve por una trayectoria circular de radio "a", centrada en el origen con velocidad angular ω en tiempo igual a cero y que pasa por el punto (a,0) hacia arriba:

La velocidad como vector en cartesianas es: $\overline{v}_{P-O} = a\,\omega\cos\varphi\;\breve{\imath} + a\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\;\breve{\jmath}$

donde el módulo es: $|\overline{v}_{P-O}| = a\,\omega$

A) Hacemos el caso particular para tiempo igual a cero $\boldsymbol{\varphi}\;(\mathbf{t=0}) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ [rad]

$$\breve{e}_t = \frac{\overline{v}_{P-O}}{|\overline{v}_{P-O}|} = cos\,\varphi\,\breve{\imath} + \; sen\,\varphi\,\breve{\jmath} = 0\,\breve{\imath} + \,\breve{\jmath} = \,\breve{\jmath}$$

Entonces

$\overline{v}_{P-O} = a\,\omega\,\breve{t} \rightarrow \overline{v}_{P-O} = a\,\omega\,\breve{j}$

Para obtener el versor normal:

$\breve{e}_n = -sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \ cos\,\varphi\,\breve{j} = -\breve{\imath}$

B) Hacemos el caso particular para $\boldsymbol{\varphi\,(t) = \frac{\pi}{2} + \omega t\,[rad]}$

$$\breve{e}_t = \frac{\overline{v}_{P-O}}{|\overline{v}_{P-O}|} = cos\,\varphi\,\breve{\imath} + \ sen\,\varphi\,\breve{j} = -sen\,\omega t\,\breve{\imath} + \cos\omega t\ \breve{j}$$

(hemos utilizado las identidades trigonométricas del coseno y del seno de la suma de ángulos)

Entonces:

$\overline{v}_{P-O} = a\,\omega\,\breve{e}_t$ (esta expresión intrínseca no cambia)

$\overline{v}_{P-O} = a\,\omega\,(-sen\,\omega t\,\breve{\imath} + \cos\omega t\ \breve{j})$

Para obtener el versor normal:

$\breve{e}_n = -sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \ cos\,\varphi\,\breve{j} = -\cos\omega t\,\breve{\imath} - sen\,\omega t\,\breve{j}$

10_ VARIACIÓN DEL VECTOR VELOCIDAD

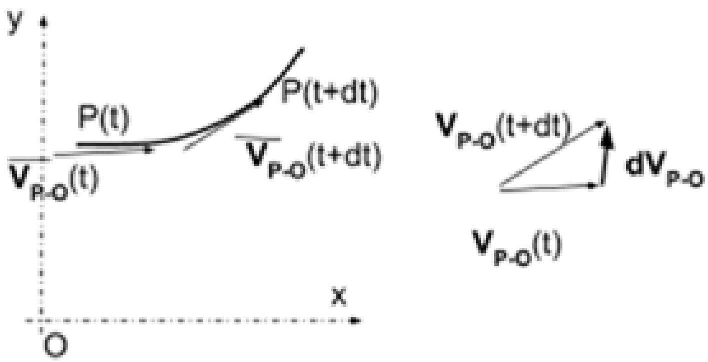

Figura 9. Acá hemos trasladado paralelamente los vectores velocidad para ver más claramente el vector cambio de velocidad.

Supongamos que el punto "P" cambia de velocidad en forma suave respecto de un observador fijo "O" y que ese cambio se hace durante un intervalo pequeño de tiempo.

$\overline{v}_{P-O}(t)$ es la velocidad inicial

$\overline{v}_{P-O}(t+dt)$ es la velocidad final

La diferencia entre estos vectores es el cambio de velocidad:

$$d\overline{v}_{P-O}(t) = \overline{v}_{P-O}(t+dt) - \overline{v}_{P-O}(t)$$

Si lo queremos ver desde el punto de vista matemático, teniendo en cuenta que el intervalo de tiempo es pequeño, se puede utilizar el concepto de diferencial de la función que representa el vector velocidad y a partir de ella calcular la velocidad final:

$$\overline{v}_{P-O}(t+dt) = \overline{v}_{P-O}(t) + \frac{d\overline{v}_{P-O}(t)}{dt}\, dt$$

En esta expresión vemos que en el segundo término aparece una derivada, a dicha derivada se la denomina aceleración instantánea del punto P respecto del observador fijo O.

Dos propiedades del cambio de velocidad:

1) *Cualquier observador fijo mide el mismo cambio de velocidad*, se puede pensar como una consecuencia de lo que fue tratado para el vector cambio de posición en las páginas precedentes.

Estamos tentados a extender esta afirmación para los observadores en movimiento respecto de "O", pero ¿cualquier observador en movimiento mide el mismo cambio de velocidad? Pero en este punto hay que ser cuidadosos, trataremos de serlo en el siguiente párrafo.

2) *Si el observador móvil "O_1" se mueve con velocidad constante (vectorialmente) mide el mismo cambio de velocidad que el observador fijo "O".* El cambio de velocidad del punto "P" medido por un observador móvil que no se mueva con velocidad constante no resulta ser el mismo que el cambio de velocidad medido por un observador en reposo.[6]

El cambio de velocidad del punto "P" que mide un observador en reposo respecto del origen, es igual al cambio de velocidad del punto "P" que mide un observador que se mueve con velocidad (vector) constante respecto de ese origen. Las posiciones no afectan esta propiedad.

[6] Sugerimos reflexionar sobre esta conclusión cuando se inicie el estudio de la Dinámica Newtoniana. Porque esta propiedad cobra particular importancia para percibir la importancia de los observadores inerciales es decir la ley de Inercia o primera ley de Newton, y su relación con la ley de Masa o segunda ley de Newton. Por supuesto sin perder de vista que la tercera ley de Newton o ley de Interacción, también es parte de este corpus teórico fundamental de la dinámica clásica y son tres postulados inseparables, es decir si violamos o no observamos uno de ellos los otros dos pierden sentido.

Pero tenemos que restringir esta propiedad al rango teórico en el cual son válidas las transformaciones galileanas. No podemos extender esta propiedad a situaciones en las cuales el observador móvil posea elevada rapidez.

Es decir que la velocidad del observador móvil debe ser mucho menor que $3x10^8$[m/s].

11_ ACELERACIÓN INSTANTÁNEA DE UN PUNTO "P" RESPECTO DE UN OBSERVADOR FIJO "O"

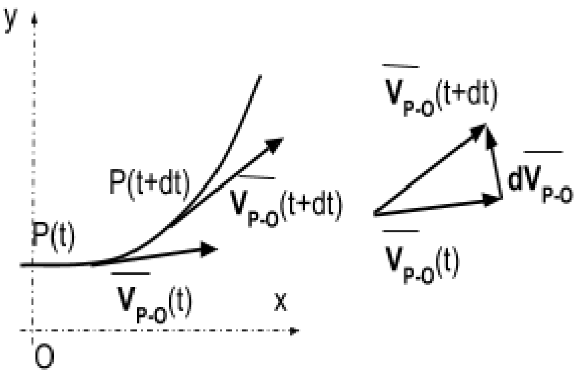

Figura 10. Por simplicidad hemos vuelto a dibujar los vectores velocidad concurrentes. Vemos la variación de velocidad, que no es tangente a la trayectoria que apunta hacia el lado cóncavo de la misma.

Cuando nos interesa describir cómo varía la velocidad de una partícula P respecto del tiempo, resulta útil y se hace muy frecuentemente un estudio de cómo se comporta el segundo término de la ecuación:

$$\overline{v}_{P-O}(t+dt) = \overline{v}_{P-O}(t) + \frac{d\overline{v}_{P-O}(t)}{dt}\,dt$$

La cual ya hemos introducido y podemos escribirla de una forma más conveniente:

$$\frac{d\overline{v}_{P-O}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{v}_{P-O}(t+dt) - \overline{v}_{P-O}(t)}{\Delta t}$$

Utilizaremos esta expresión como definición operativa del vector aceleración instantánea del punto material "P" respecto del punto fijo "O".

$$\overline{a}_{P-O}(t) = \frac{d\overline{v}_{P-O}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{v}_{P-O}(t+dt) - \overline{v}_{P-O}(t)}{\Delta t}$$

La interpretamos como el cociente de un vector por un escalar.

Dado que el cambio de velocidad se verifica en un intervalo de tiempo muy pequeño el vector resultante en el entorno del punto "P", aceleración instantánea, apuntará hacia la concavidad de la trayectoria.

Expresión de la aceleración en coordenadas intrínsecas

Derivamos la expresión de la velocidad en coordenadas intrínsecas:

$$\overline{a}_{P-O}(t) = \frac{d\overline{v}_{P-O}(t)}{dt} = \frac{d|\overline{v}_{P-O}(t)|}{dt}\,\breve{e}_t + |\overline{v}_{P-O}(t)|\,\frac{d\,\breve{e}_t}{dt} =$$

Ahora la derivada del versor tangente $\breve{e}_t = \cos\varphi\ \breve{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\ \breve{\jmath}$ es la siguiente:

$$\frac{d\breve{e}_t}{dt} = (-sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \cos\varphi\ \breve{\jmath})\,\omega$$

La expresión entre paréntesis es un nuevo versor que es ortogonal al primero, lo probamos haciendo el producto escalar entre ambos:

$$(\cos\varphi\ \breve{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\ \breve{\jmath})\cdot(-sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \cos\varphi\ \breve{\jmath}) = 0$$

entonces: $\breve{e}_n = -sen\,\varphi\,\breve{\imath} + \cos\varphi\ \breve{\jmath}$

$\breve{e}_n$ es el versor normal a la trayectoria en el entorno del punto "P"

El versor normal apunta hacia la concavidad de la trayectoria y en esa dirección se encuentra el centro de curvatura de dicha curva.

$$\overline{a}_{P-O}(t) = \frac{d|\overline{v}_{P-O}(t)|}{dt}\,\breve{e}_t + |\overline{v}_{P-O}(t)|\,\omega\,\breve{e}_n$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración son dos:

- La aceleración tangencial, que representa la variación del módulo de la velocidad.
- La aceleración normal, que representa el cambio de dirección del vector velocidad.

Seguiremos unos pasos más, para encontrar otras propiedades relacionadas con la aceleración normal.

12_ CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ O CIRCULO OSCULADOR: CENTRO DE CURVATURA LOCAL Y RADIO DE CURVATURA LOCAL DE UNA TRAYECTORIA.

En reiteradas ocasiones, al estudiar el movimiento, hemos aceptado que en el límite para arcos de una trayectoria que se hacen tender a cero el arco de trayectoria se puede confundir o tomar como la secante de ese arco elemental de trayectoria.

En forma análoga un arco de trayectoria infinitesimal se puede confundir con un arco de circunferencia de longitud infinitesimal.

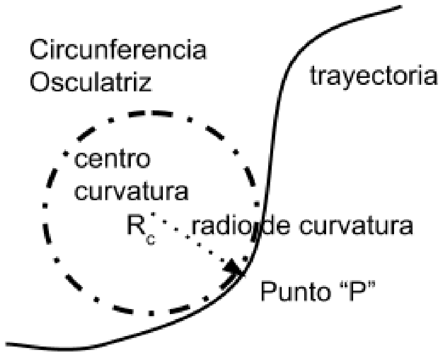

Figura 11

Así es como decimos que la circunferencia a la que pertenece ese arco infinitesimal que se confunde con el arco de trayectoria infinitesimal, se denomina Circunferencia Osculatriz.

El centro de la circunferencia osculatriz es el centro de curvatura de la trayectoria en el entorno del punto de la misma que estamos estudiando.

El radio de la circunferencia osculatriz,"R_c", es el radio de curvatura de la trayectoria en el entorno del punto de la misma que estamos estudiando.

<u>Observación</u>: vemos que el centro de curvatura está ubicado en la dirección que indica el versor normal $\breve{e}_n$, y sobre la recta del mismo. El radio de curvatura es la distancia medida sobre este eje entre el punto "P" y el centro de curvatura.

Retomamos la expresión de la aceleración en coordenadas intrínsecas

$$\bar{a}_{P-O}(t) = \frac{d|\bar{v}_{P-O}(t)|}{dt}\ \breve{e}_t + |\bar{v}_{P-O}(t)|\ \omega\ \breve{e}_n$$

Pero ahora incorporaremos la relación escalar que vincula el módulo de la velocidad del punto "P" con la velocidad angular y el radio de la circunferencia.

$$|\bar{v}_{P-O}| = \omega\ R_C$$

$$\frac{|\bar{v}_{P-O}|}{R_C} = \omega$$

Entonces reemplazamos de ambas maneras:

$$\bar{a}_{P-O}(t) = \frac{d|\bar{v}_{P-O}(t)|}{dt}\ \breve{e}_t + \omega^2\, R_C\ \ \breve{e}_n$$

$$\bar{a}_{P-O}(t) = \frac{d|\bar{v}_{P-O}(t)|}{dt}\ \breve{e}_t + \frac{|\bar{v}_{P-O}|^2}{R_C}\ \ \breve{e}_n$$

La componente normal de la aceleración:

$$|\bar{a}_n| = \frac{|\bar{v}_{P-O}|^2}{R_C}$$

De esta expresión podemos extraer una forma muy práctica de calcular el radio de curvatura de la trayectoria en el punto “P”, que estamos estudiando:

$$R_C = \frac{|\bar{v}_{P-O}|^2}{|\bar{a}_n|}$$

EJEMPLO

Estudiamos la curvatura de la trayectoria de un tiro horizontal en el vacío. Se arroja horizontalmente una partícula desde un acantilado con rapidez inicial V_o y se desea saber el radio de curvatura de la trayectoria en el instante inmediatamente posterior al inicial. También en el instante $t=t_1$. Supongamos que el precipicio tiene suficiente profundidad y ancho como para que la partícula realice la trayectoria parabólica continua.

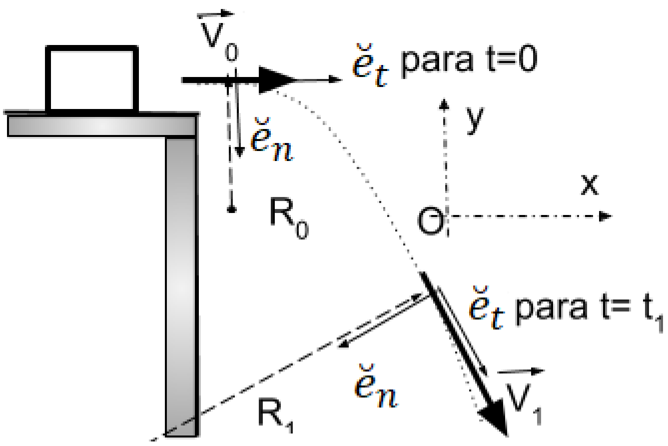

Figura 12

El sistema cartesiano x; O; y es fijo.

Durante todo el movimiento la aceleración de la gravedad es constante: $\vec{g} = -g\ \breve{\jmath}$

Para t=0:

$\breve{e}_n = -\breve{j}$

$\breve{e}_t = \breve{i}$

Hacemos el producto escalar para proyectar la aceleración en la dirección normal, entonces la coordenada aceleración normal es: $|\bar{a}_n| = \vec{g} \cdot \breve{e}_n = g$

El vector aceleración normal para este instante:

$|\bar{a}_n| = \vec{g} \cdot \breve{e}_n$ en coordenadas intrínsecas

$\bar{a}_n = -g\,\breve{j}$ en coordenadas cartesianas

Entonces: $R_0 = \frac{|\bar{v}_{P-O}|^2}{|\bar{a}_n|} = \frac{|\bar{v}_{P-O}|^2}{g}$

Para t=t$_1$:

La velocidad para este instante en coordenadas cartesianas es:

$\vec{v}_1 = v_0\breve{i} - g\,t_1\,\breve{j}$

entonces

$$\breve{e}_t = \frac{v_0\,\breve{i} - g\,t_1\,\breve{j}}{\sqrt{v_0^2 + g^2\,t_1^2}}$$

y utilizando la propiedad de ortogonalizar en el plano:

$$\breve{e}_n = \frac{-g\,t_1\,\breve{i} - v_0\,\breve{j}}{\sqrt{v_0^2 + g^2\,t_1^2}}$$

Hacemos el producto escalar para proyectar la aceleración en la dirección normal, entonces la coordenada aceleración normal es:

$$|\bar{a}_n| = \vec{g} \cdot \breve{e}_n \quad \Rightarrow \quad |\bar{a}_n| = (-g\,\breve{j}) \cdot \left(\frac{-g\,t_1\,\breve{i} - v_0\,\breve{j}}{\sqrt{v_0^2 + g^2\,t_1^2}}\right)$$

$$|\bar{a}_n| = g\,\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2\,t_1^2}}$$

y como vector en coordenadas intrínsecas:

$$\bar{a}_n = g\,\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2\,t_1^2}}\,\breve{e}_n$$

Lo que representa en coordenadas cartesianas:

$$\overline{a}_n = g\ \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2\ t_1^2}} \left(\frac{-g\ t_1\ \breve{\imath} - v_0\ \breve{\jmath}}{\sqrt{v_0^2 + g^2\ t_1^2}} \right) = g\ \frac{v_0}{(v_0^2 + g^2\ t_1^2)}\ (-g\ t_1\ \breve{\imath} - v_0\ \breve{\jmath})$$

Entonces:

$$R_1 = \frac{|\overline{v}_1|^2}{|\overline{a}_n|} = \frac{v_0^2 + (g\ t_1)^2}{g\ \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2\ t_1^2}}}$$

$$R_1 = \frac{[v_0^2 + (g\ t_1)^2]^{3/2}}{g\ v_0}$$

Si bien la expresión aparenta ser muy complicada, no presenta ninguna dificultad pues los datos están a la vista desde el inicio del planteo.

Se puede apreciar que en el tiro horizontal el radio de curvatura de la trayectoria en el punto donde se encuentra el móvil, aumenta a medida que pasa el tiempo. La relación es: el radio varía con el cubo del tiempo.

13 APÉNDICE

Coordenadas polares

(El desarrollo de este sistema lo hacemos restringido a 2D, para extenderlo a 3D habría que desarrollar sistema de coordenadas cilíndrico y esférico, pero consideramos que es mejor estudiarlo después de tener conocimientos sólidos de Análisis Matemático II).

$$\overline{r}_{P-O} = \pm\, |\bar{r}_{P-O}|\, \breve{e}_r$$

Es decir el vector se escribe como módulo del vector en la dirección radial con el signo más si es un vector que apunta del centro hacia afuera como el versor radial $\breve{e}_r$ o el signo menos si apunta hacia adentro contrario a $\breve{e}_r$

El versor radial se puede escribir en cartesianas, es decir podemos dar la transformación de polar a cartesiano de este versor (en álgebra se hace esto mismo y también se extiende la manera de hacer operaciones con métodos matriciales):

$\breve{e}_r = cos\,\theta\,\breve{\imath} + sen\,\theta\,\breve{\jmath}$ (ver **figura 13,** próxima página)

Tal como hemos expresado en la ecuación que expresa la posición en coordenadas polares.

$$\overline{r}_{P-O} = \pm\, |\bar{r}_{P-O}|\, \breve{e}_r$$

Nos da la impresión a primera vista, que la variable es el módulo y que el versor $\breve{e}_r$ está fijo.

Tenemos que entender que el versor $\breve{e}_r$ es variable en θ, que es el ángulo que forma el versor con el eje "+x", cuando deseamos transformar la notación polar en notación cartesiana.

Lo interesante es que tenemos un versor que acompañará la posición del punto material, y esta propiedad es muy útil para describir movimientos curvilíneos en general (los movimientos rectilíneos son más sencillos de representar y calcular en coordenadas cartesianas).

En general los movimientos curvilíneos se representan más sencillamente en coordenadas polares y luego los cálculos se podrán hacer en polares o en cartesianas según convenga[7] (también veremos el sistema de coordenadas intrínseco con sus respectivas transformaciones a coordenadas cartesianas).

[7] En Física es muy frecuente que describamos el movimiento en un intervalo, desde un punto inicial a un punto final. Para hacer cálculos utilizaremos **herramientas** de álgebra y de análisis matemático, la herramienta que mejor describa la situación y de la manera más simple.

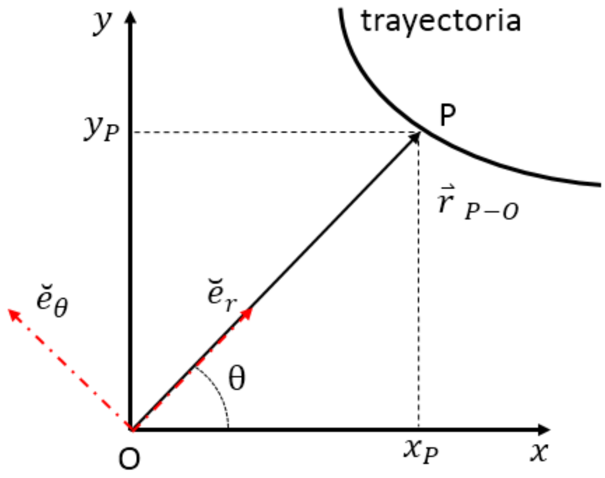

Figura 13

En la **figura 6** el ángulo se lee "θ" theta que es una variable (no confundir con el versor), y los versores $\breve{e}_r$ y $\breve{e}_\theta$ (no confundir con versor tangente a la trayectoria).

El versor $\breve{e}_\theta$ es normal al versor radial, matemáticamente se puede calcular mediante la derivada del versor $\breve{e}_r$.

$$\frac{d(\breve{e}_r)}{dt} = \frac{d(\cos\theta\,\breve{\imath} + \,sen\,\theta\,\breve{\jmath}\,)}{dt}$$

Derivamos aplicando regla de la cadena y recordando que $\breve{\imath}$; $\breve{\jmath}$ son versores fijos y sus derivada son nulas.

$$\frac{d(\breve{e}_r)}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + \,\cos\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt}$$

La última parte es la derivada del ángulo respecto del tiempo, la denominaremos con la letra omega minúscula y es el módulo de la velocidad angular ω. El paréntesis es un versor y lo llamaremos versor transversal $\breve{e}_\theta$.

$$\breve{e}_\theta = -sen\,\theta\,\breve{\imath} + \,\cos\theta\,\breve{\jmath}$$

$$\frac{d(\breve{e}_r)}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + \,\cos\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt} = \omega\breve{e}_\theta$$

Los versores polares y los intrínsecos cambian punto a punto, pero en general facilitan la interpretación física. Los versores cartesianos permiten aplicar más fácilmente cálculos de análisis matemático, es decir derivadas e integrales.

Esta ecuación nos está indicando que la derivada de un versor es perpendicular a dicho versor y además su módulo es igual a la velocidad angular del movimiento del punto que estamos estudiando. (Lo antedicho lo podemos representar como un producto vectorial para sistema de mano derecha o dextrógiro, pero será tema de un capítulo de movimiento relativo que estudiaremos más adelante).

Por el momento tenemos definidos dos versores polares y sus transformaciones a sistema cartesiano en 2D:

$$\breve{e}_r = cos\,\theta\,\breve{\imath} + \,sen\,\theta\,\breve{\jmath}$$

$$\breve{e}_\theta = -sen\,\theta\,\breve{\imath} + \,cos\,\theta\,\breve{\jmath}$$

VECTOR VELOCIDAD EN COORDENADAS POLARES Y TRANSFORMACION A COORDENADAS CARTESIANAS EN 2D.

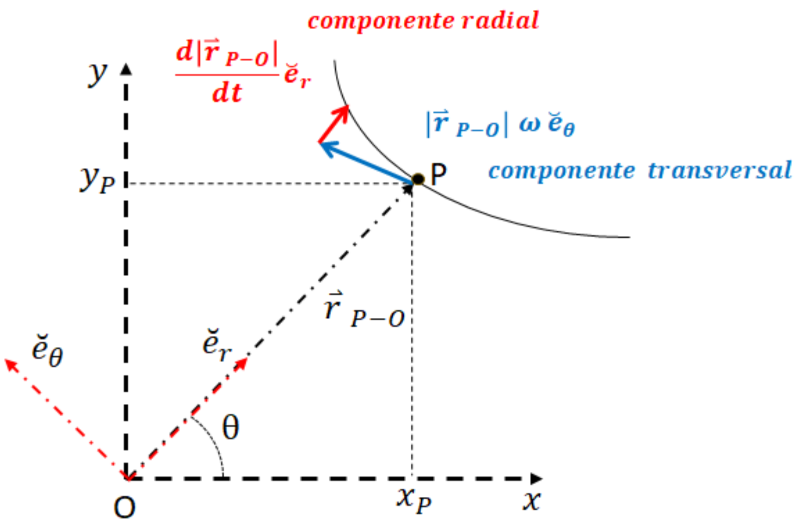

Figura 14

Partamos de la posición expresada en coordenadas polares

$$\bar{r}_{P-O} = \pm\,|\bar{r}_{P-O}|\,\breve{e}_r$$

Y derivemos

$$\bar{v}_{P-O} = \frac{d\bar{r}_{P-O}}{dt} = \frac{d\,|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\breve{e}_r + |\bar{r}_{P-O}|\frac{d\,\breve{e}_r}{dt}$$

Recordemos la regla de derivada del producto y lo que hemos dicho sobre la expresión de la derivada del versor radial $\breve{e}_r$:

$$\frac{d\,\breve{e}_r}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + \,cos\,\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt}$$

Entonces:

$$\bar{v}_{P-O} = \frac{d\bar{r}_{P-O}}{dt} = \frac{d\,|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\breve{e}_r + |\bar{r}_{P-O}|\,\omega\,\breve{e}_\theta$$

Donde:

$$\frac{d(\breve{e}_r)}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + \,cos\,\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt}$$

Hemos obtenido la expresión de la velocidad de la partícula P respecto del origen fijo (o de cualquier otro punto fijo al origen). En el segundo miembro, el primer término representa: la rapidez con la cual varía el módulo de la posición en la dirección radial, es decir el cambio instantáneo de módulo de radio en la unidad del tiempo que se verifica en la dirección $\breve{e}_r$ radial. El segundo término resulta familiar para el movimiento circular, ya que es el producto del módulo del radio por el módulo de la velocidad angular y representaría un tramo elemental de movimiento circular que se da en la dirección del versor $\breve{e}_\theta$ transversal (en la figura representamos en rojo estos dos términos).

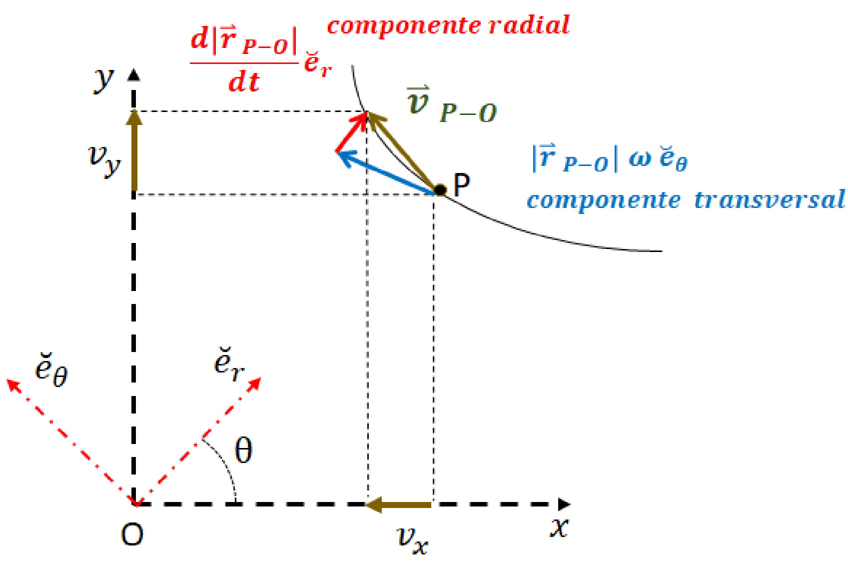

Figura 15

Si necesitamos conocer la velocidad en coordenadas cartesianas a partir de este planteo inicial en coordenadas polares utilizamos las transformaciones vistas (o cualquier método matricial visto en álgebra). Desarrollamos:

$$\bar{v}_{P-O} = \frac{d\,|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\breve{e}_r + |\bar{r}_{P-O}|\,\omega\,\breve{e}_\theta$$

Reemplazamos: $\breve{e}_r = cos\,\theta\,\breve{\imath} + sen\,\theta\,\breve{\jmath}$ $\quad$ $\breve{e}_\theta = -sen\,\theta\,\breve{\imath} + cos\,\theta\,\breve{\jmath}$

$$\bar{v}_{P-O} = \frac{d\,|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,(cos\,\theta\,\breve{\imath} + sen\,\theta\,\breve{\jmath}) + |\bar{r}_{P-O}|\,\omega\,(-sen\,\theta\,\breve{\imath} + cos\,\theta\,\breve{\jmath})$$

Reagrupamos:

$$\bar{v}_{P-O} = \left(\frac{d\,|\bar{r}_{P-O}|}{dt} cos\,\theta - |\bar{r}_{P-O}|\,\omega\,sen\,\theta\right)\breve{\imath} + \left(\frac{d\,|\bar{r}_{P-O}|}{dt} sen\,\theta + |\bar{r}_{P-O}|\omega\,cos\,\theta\right)\breve{\jmath}$$

Expresión de la aceleración en coordenadas polares:

Derivamos la expresión de la velocidad para coordenadas polares, en función del tiempo:

$$\frac{d\bar{v}_{P-O}(t)}{dt} = \frac{d^2|\bar{r}_{P-O}|}{dt^2}\,\breve{e}_r + \frac{d|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\frac{d\breve{e}_r}{dt} + \frac{d|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\omega\,\breve{e}_\theta + |\bar{r}_{P-O}|\frac{d\omega}{dt}\,\breve{e}_\theta + |\bar{r}_{P-O}|\,\omega\frac{d\breve{e}_\theta}{dt}$$

Para reducir esta expresión a términos con interpretación física aceptable, recordamos:

$\breve{e}_r = cos\,\theta\,\breve{\imath} + sen\,\theta\,\breve{\jmath}$ versor radial expresado en coordenadas cartesianas.

Derivamos: $\frac{d\breve{e}_r}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + cos\,\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt} = (-sen\,\theta\,\breve{\imath} + cos\,\theta\,\breve{\jmath})\,\omega$

Donde $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ es la expresión escalar de la velocidad angular.

Y el versor es el transversal expresado en coordenadas cartesianas:

$\breve{e}_\theta = -\,sen\,\theta\;\breve{\imath} + cos\,\theta\,\breve{\jmath}$

Observación: el versor $\breve{e}_\theta$ no es el ángulo θ. La interpretación física del versor corresponde a la dirección normal al versor radial. Mientras que el ángulo es la variable que orienta el versor radial respecto del eje cartesiano +x.

Derivamos:

$$\frac{d\,\breve{e}_\theta}{dt} = (-\,cos\,\theta\;\breve{\imath} - sen\,\theta\,\breve{\jmath})\frac{d\theta}{dt}$$

Veamos que:

$$-\breve{e}_r = (-cos\,\theta\,\breve{\imath} - \,sen\,\theta\,\breve{\jmath})$$

Entonces, reemplazamos en la expresión de la aceleración, que queda:

$$\bar{a}_{P-O}(t) = \frac{d\bar{v}_{P-O}(t)}{dt}$$

$$\bar{a}_{P-O}(t) = \frac{d^2|\bar{r}_{P-O}|}{dt^2}\,\breve{e}_r + \frac{d|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\omega\,\breve{e}_\theta + \frac{d|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\omega\,\breve{e}_\theta + \,|\bar{r}_{P-O}|\frac{d\omega}{dt}\,\breve{e}_\theta + |\bar{r}_{P-O}|\,\omega^2\,\breve{e}_r$$

$$\bar{a}_{P-O}(t) = \left(\frac{d^2|\bar{r}_{P-O}|}{dt^2} - |\bar{r}_{P-O}|\,\omega^2\right)\breve{e}_r + \left(2\frac{d|\bar{r}_{P-O}|}{dt}\,\omega\,+\,|\bar{r}_{P-O}|\frac{d\omega}{dt}\right)\breve{e}_\theta$$

En esta expresión:

1. la componente radial tiene dos términos, el primero es aceleración debida a la variación del módulo del vector posición y el segundo, se puede decir, es semejante a la aceleración centrípeta.
2. La componente transversal tiene dos términos, el primero es la aceleración complementaria o aceleración de Coriolis y el segundo es semejante a la aceleración lineal debida a la variación del módulo de la velocidad angular.

Caso particular para el movimiento circular:

El radio de la trayectoria es constante, entonces si el punto de referencia es el centro de la circunferencia, se verifica que el módulo del vector posición es constante y sus derivadas son nulas.

$$\bar{a}_{P-O}(t) = (0 - |\bar{r}_{P-O}|\,\omega^2)\breve{e}_r + \left(2(0)\,\omega\,+\,|\bar{r}_{P-O}|\frac{d\omega}{dt}\right)\breve{e}_\theta$$

$$\bar{a}_{P-O}(t) = -|\bar{r}_{P-O}|\,\omega^2\,\breve{e}_r + |\bar{r}_{P-O}|\frac{d\omega}{dt}\breve{e}_\theta$$

En este caso particular el primer término corresponde a aceleración centrípeta y el segundo término a aceleración transversal, que como caso particular coincide con aceleración tangencial.

Si además el movimiento fuese uniforme, se verifica que la aceleración angular es nula entonces:

$$\bar{a}_{P-O}(t) = -|\bar{r}_{P-O}|\,\omega^2\,\breve{e}_r + |\bar{r}_{P-O}|(0)\breve{e}_\theta$$

$$\bar{a}_{P-O}(t) = -|\bar{r}_{P-O}|\,\omega^2\,\breve{e}_r$$

Sobrevive solamente el término de aceleración centrípeta.

EJEMPLOS:

1- **Móvil "P" que se mueve por una trayectoria circular de radio "a", centrada en el origen**

(la posición se verifica que es radial). $\vec{r}_{P-O} = a\ \bar{e}_r$

$\vec{v}_{P-O} = 0\ \breve{e}_r + a\omega\ \breve{e}_\theta = a\omega\ \breve{e}_\theta$ (la velocidad es transversal, en este caso coincide con la dirección tangencial. Recordemos que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria).

Y las expresiones en coordenadas cartesianas son:

$$\vec{r}_{P-O} = a\ cos\ \theta\ \breve{\imath} + a\ sen\ \theta\ \breve{\jmath}$$

$$\vec{v}_{P-O} = -a\omega\ sen\ \theta\ \breve{\imath} + a\omega\ cos\ \theta\ \breve{\jmath}$$

2- **Móvil "P" que se mueve por una trayectoria espiral**

El punto "P" se mueve sobre la trayectoria espiral de ecuación:

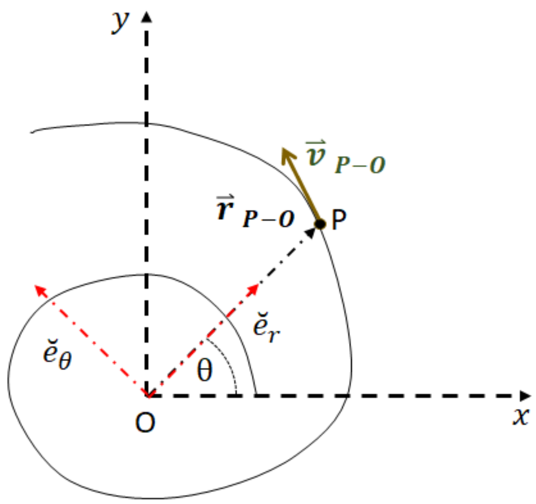

Figura 16. El mismo vector $\vec{v}_{P-O}$ se proyecta sobre el sistema polar y sobre el sistema cartesiano.

$$\vec{r}_{P-O} = (a + b\theta)\ \breve{e}_r$$

Donde:

"a": es un parámetro medido en [m] cuya interpretación física es el módulo de la posición del primer punto de la espiral respecto del origen X_a.
"b" es un parámetro medido en [m/rad]
"θ" es el ángulo como coordenada del sistema polar respecto de "X" medido en [rad], es una función variable con el tiempo, $\theta = \theta(t)$
"$\breve{e}_r$" versor radial.

La expresión cartesiana de la posición es:

$\vec{r}_{P-O} = (a + b\theta).(\cos\theta\,\breve{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\breve{\jmath})$

La derivada del módulo es:

$$\frac{d|\vec{r}_{P-O}|}{dt} = b\frac{d\theta}{dt} = b\omega$$

Entonces la velocidad expresada en coordenadas polares (retomaremos esta expresión cuando veamos aceleración en coordenadas polares):

$\vec{v}_{P-O} = b\omega\ \breve{e}_r + (a + b\theta)\omega\,\breve{e}_\theta$

Para escribir las componentes cartesianas V_x y V_y, recurriremos a las ecuaciones de los versores polares expresados en cartesianas.

$\breve{e}_r = \cos\theta\,\breve{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\breve{\jmath}$

$\breve{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\breve{\imath} + \cos\theta\,\breve{\jmath}$

Entonces:

$\vec{v}_{P-O} = [b\omega\cos\theta - (a + b\theta)\omega\operatorname{sen}\theta]\,\breve{\imath} + [b\omega\operatorname{sen}\theta + (a + b\theta)\omega\cos\theta]\,\breve{\jmath}$

Como era esperable, verificamos que esta ecuación es la derivada del vector posición respecto del tiempo expresado en coordenadas cartesianas.

El texto "Física para estudiantes de Ingeniería: Cinemática de la Partícula", es una obra colectiva llevada a cabo por docentes de Física I de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA). Se enmarca dentro de las actividades correspondientes al PEFI (Plan Estratégico de Formación de Ingenieros) y todos los derechos se encuentran protegidos bajo licencia Creative Commons.

Física para estudiantes de Ingeniería- Ema E. Aveleyra (coord. y coautora), Jorge Cornejo (coautor), Adrián Ferrini (coautor), María Cristina Menikheim (coautora), Sergio Rossi (coautor), Gonzalo Gómez Toba (edición técnica)/1° edición/Buenos Aires: Facultad de Ingeniería, 2018. Revisada en 2019-2020.

ISBN ("en trámite")

Publicación digital.